Σ.Η.Μ.Μ.Υ. - Ροή Μ

Μαθήματα Μαθηματικών

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Σ.Ε.Μ.Φ.Ε.

Στόχοι

- **Η εμβάθυνση στη μαθηματική παιδεία (μετά τα μαθήματα κορμού).**
- **Μαθηματικά εργαλεία και υπολογισμοί για μηχανικούς.**
- **Η ανάδειξη της διεπιστημονικότητας και του εκπαιδευτικού χαρακτήρα των Μαθηματικών.**

Σ.Η.Μ.Μ.Υ. – Σ.Ε.Μ.Φ.Ε.

- **Ροή «Μαθηματικά της Πληροφορικής»** στην Κατεύθυνση Μαθηματικού Εφαρμογών της Σ.Ε.Μ.Φ.Ε., όπου προσφέρονται μαθήματα της Σ.Η.Μ.Μ.Υ.

- Παραδοσιακά, σπουδαστές της Σ.Η.Μ.Μ.Υ. εκπονούν διπλωματικές στον Τομέα Μαθηματικών Σ.Ε.Μ.Φ.Ε., και αντίστροφα, σπουδαστές της Σ.Ε.Μ.Φ.Ε. εκπονούν διπλωματικές στη Σ.Η.Μ.Μ.Υ.

- **Ροή Μ** στο Πρόγραμμα Σπουδών της Σ.Η.Μ.Μ.Υ., όπου προσφέρονται μαθήματα της Σ.Ε.Μ.Φ.Ε.

- https://www.ece.ntua.gr/gr/undergraduate/courses/flow/12

Ροή Μ: Μαθήματα 6ου εξαμήνου

- Αριθμητικές Μέθοδοι Διαφορικών Εξισώσεων
- Μαθηματική Λογική (μάθημα Σ.Η.Μ.Μ.Υ.)
- Στοχαστικές Διαδικασίες
- Ανάλυση Πινάκων και Εφαρμογές

Αριθμητικές Μέθοδοι Διαφορικών Εξισώσεων (Αριθμητική Ανάλυση, Διαφορικές Εξισώσεις)

Το μάθημα παρέχει το **βασικό υπόβαθρο για τη μελέτη μεθόδων Πεπερασμένων Στοιχείων και Πεπερασμένων Διαφορών** για την **αριθμητική επίλυση μερικών διαφορικών εξισώσεων**. **Οι μέθοδοι Πεπερασμένων Στοιχείων έχουν αναπτυχθεί συστηματικά για τη λύση εφαρμοσμένων προβλημάτων αρχικά κυρίως από τους μηχανικούς.** Παράλληλα οι μαθηματικοί ασχολήθηκαν με τη θεμελίωση της σχετικής θεωρίας και τη μελέτη θεμάτων ευστάθειας και εκτίμησης σφάλματος.

Παραδείγματα εφαρμογής της **μεθόδου Galerkin με πεπερασμένα στοιχεία**, **Χώροι Hilbert**, Θεώρημα Προβολής. **Προβλήματα Συνοριακών Τιμών** και Μέθοδος Galerkin: Γενικευμένες παράγωγοι και **χώροι Sobolev**. **Τύποι Green**. Τμηματικά πολυωνυμικές συναρτήσεις. **Κυβικές συναρτήσεις Hermite και splines**. **Εκτιμήσεις σφάλματος**.

Εφαρμογές: Ροή ρευστού, Ροή θερμότητας, Φορτισμένη δοκός, Φορτισμένη πλάκα.

Παραβολικά και υπερβολικά προβλήματα.

Πεπερασμένες Διαφορές: Μη ομογενές **πρόβλημα Dirichlet για εξίσωση Poisson** (Σχήμα 5 σημείων), **Εξίσωση θερμότητας** (**πεπλεγμένη μέθοδος Euler**, **μέθοδος Crank-Nicolson**, **Ευστάθεια**).

Μαθηματική Λογική (μάθημα ΣΗΜΜΥ) (Μαθηματική Ανάλυση)

Προτασιακός Λογισμός: Γλώσσα, Μοναδική αναγνωσιμότητα, Λογικοί σύνδεσμοι, απονομές αλήθειας, σημασιολογικές έννοιες, επάρκεια συνδέσμων, διαζευκτική και συζευκτική κανονική μορφή, Θεώρημα συμπάγειας προτασιακού λογισμού, Εφαρμογές.

Πρωτοβάθμιος Κατηγορηματικός Λογισμός: Γλώσσα, μεταβλητές, έννοιες ελεύθερης και δεσμευμένης μεταβλητής, αντικατάσταση, αναλογία με τον προγραμματισμό, η έννοια της δομής, ερμηνεία της γλώσσας, ορισμός της αλήθειας κατά Tarski.

Αξιωματικοποίηση της Πρωτοβάθμιας Λογικής: Η έννοια του αξιωματικού συστήματος, αναλογίες με αλγοριθμικές έννοιες, η έννοια της συνέπειας, τα θεωρήματα της ορθότητας και τα θεωρήματα της πληρότητας του Goedel, και η ανταποκρισιμότητα των Goedel-Church.

Αποδεικτική Θεωρία Προτασιακού και Κατηγορηματικού Λογισμού: Το σύστημα Gentzen, προτασιακό resolution, απαλοιφή των τομών, τα συστήματα tableau, η πληρότητα μέσω των συστημάτων tableau.

Στοχαστικές Διαδικασίες (Θεωρία Πιθανοτήτων και Στατιστική)

Κατασκευή και περιγραφή στοχαστικών διαδικασιών, κατανομές πεπερασμένης διάστασης.

Μαρκοβιανές Αλυσίδες: Πιθανότητες μετάβασης, εξισώσεις Chapman-Kolmogorov, ταξινόμηση σε κλάσεις επικοινωνίας, Χρόνοι διακοπής, ισχυρή μαρκοβιανή ιδιότητα, επαναληπτικότητα, παροδικότητα. Τυχαίοι περίπατοι.

Θεωρία Δυναμικού. Προβλήματα συνοριακών τιμών για πιθανότητες απορρόφησης, χρόνους άφιξης και χρόνους κατάληψης.

Αναλλοίωτες Κατανομές: Κριτήρια ύπαρξης, μοναδικότητας. **Χρονική αντιστρεψιμότητα** και συνθήκες ακριβούς ισορροπίας.

Ασυμπτωτικά Θεωρήματα: Σύζευξη, περιοδικότητα, ασυμπτωτική κατανομή, ανανεωτικό θεώρημα, εργοδικό θεώρημα. Χρόνοι μείξης και χαλάρωσης.

Εφαρμογές: Αναζήτηση στο διαδίκτυο, αναλογία ηλεκτρικών κυκλωμάτων και μαρκοβιανών αλυσίδων, η αρχή του Rayleigh. Υπολογιστική μέθοδος MCMC

Διαδικασίες Poisson: Κατασκευή, ανεξάρτητες προσαυξήσεις, ιδιότητες.

Ανάλυση Πινάκων και Εφαρμογές (Γραμμική Άλγεβρα, Μαθηματική Ανάλυση)

Νόρμες διανυσμάτων, εσωτερικά γινόμενα και ανισότητα Cauchy-Schwarz, νόρμες πινάκων, τριγωνοποίηση πίνακα κατά Schur, **νόρμες πινάκων και φασματική ακτίνα.**

Ορθοκανονικοποίηση Gram-Schmid, παραγοντοποίηση QR και εφαρμογές.

Παραγοντοποίηση ιδιαζουσών τιμών (SVD), ιδιάζουσες τιμές και ιδιάζοντα διανύσματα, ευστάθεια τετραγωνικών γραμμικών συστημάτων, ψευδοαντίστροφος πίνακας, πρόβλημα ελαχίστων τετραγώνων.

Κανονικοί πίνακες, απόσταση τυχαίου πίνακα από την κανονικότητα.

Θεωρία Perron-Frobenius, φασματική ανάλυση θετικών/μη αρνητικών πινάκων, ιδιοτιμή Perron και ιδιοδιάνυσμα Perron, ασυμπτωτική συμπεριφορά δυνάμεων θετικών/μη αρνητικών πινάκων και συγγενή οριακά θεωρήματα.

Διαταραχές και συνέχεια ιδιοτιμών πίνακα, Θεωρήματα Bauer-Fike και Henrici, δίσκοι Gershgorin, δείκτης κατάστασης ιδιοτιμής, Θεώρημα Rayleigh-Ritz.

Ψευδοφάσμα πίνακα, γεωμετρικές και τοπολογικές ιδιότητες ψευδοφάσματος, εφαρμογές στη μελέτη της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς των δυνάμεων ενός πίνακα.

Ροή Μ: Μαθήματα 7ου εξαμήνου

- Θεωρία Μέτρου και Εφαρμογές
- Άλγεβρα και Εφαρμογές

Θεωρία Μέτρου και Εφαρμογές (Μαθηματική Ανάλυση)

Το μάθημα περιλαμβάνει αρχικά μια **εισαγωγή στη Θεωρία μετρικών χώρων και σε απαραίτητα εργαλεία από τη Θεωρία συνόλων**:

Αξίωμα επιλογής, καλές διατάξεις, **Λήμμα του Zorn**, διατακτικούς και πληθαρίθμους.

Το **Θεώρημα Vitali** στη συνέχεια δείχνει ότι **δεν είναι δυνατόν να γενικευτεί η έννοια του μήκους σε οποιοδήποτε υποσύνολο των πραγματικών αριθμών**, κάτι που δίνει λαβή για να εισαχθούν οι έννοιες της άλγεβρας και σ-άλγεβρας σαν αρκετά μεγάλες οικογένειες υποσυνόλων των ευκλείδειων χώρων, στις οποίες μπορούμε να έχουμε κάποια **γενικευμένη έννοια μήκους ή όγκου**.

Η έννοια του μέτρου που ορίζεται σ' αυτό το σημείο περιλαμβάνει τις έννοιες του μήκους, εμβαδού, όγκου ή πιθανότητας σε κάποιο χώρο.

Ακολούθως εισάγονται με τη **μέθοδο Καραθεοδωρή** τα εξωτερικά μέτρα και κατά συνέπεια οι **σ-άλγεβρες των μετρήσιμων συνόλων**, ειδικότερα στους ευκλείδειους χώρους. Μετά απ' αυτό μελετάμε τις βασικές ιδιότητες του **μέτρου Lebesgue**, τις μετρήσιμες και κατά συνέπεια ολοκληρώσιμες συναρτήσεις και ορίζουμε το **ολοκλήρωμα Lebesgue** αποδεικνύοντας τις επιθυμητές **ιδιότητες** σύγκλισης που το **διαφοροποιούν** ουσιαστικά από το **ολοκλήρωμα Riemann.**

Άλγεβρα και Εφαρμογές (Γραμμική Άλγεβρα)

Το μάθημα εισάγει τους σπουδαστές στις **δομές ομάδων** και τη θεωρία τους με στόχο την **ανάπτυξη εργαλείων για την ταξινόμηση των πεπερασμένων ομάδων και την ανάδειξη των ποικίλων και σημαντικών εφαρμογών τους**.

Δομή του σώματος **των μιγαδικών αριθμών**, έννοιες **θεωρίας συνόλων** και της **θεωρίας αριθμών** και συνεχίζει με τις **βασικές έννοιες της θεωρίας ομάδων** (υποομάδες, σύμπλοκα, κανονικές υποομάδες, ομομορφισμοί-ισομορφισμοί, παράσταση ομάδας, **δράση ομάδας**), οι οποίες εμπεδώνονται με παραδείγματα, όπως: **ομάδες συμμετριών, n-οστές ρίζες της μονάδας, ισοτιμίες ακεραίων, ομάδες μεταθέσεων, τα κουατέρνια**.

Αποδεικνύονται σημαντικά θεωρήματα των Μαθηματικών, όπως: το **Θεώρημα Ταξινόμησης Κυκλικών Ομάδων**, το **Θεώρημα Cayley**, το **Θεώρημα Lagrange**, το **Μικρό Θεώρημα Fermat** και το **Θεώρημα Euler**, ενώ διδάσκεται και το **Θεώρημα Ταξινόμησης Πεπερασμένα Παραγόμενων Αβελιανών Ομάδων**.

Τέλος δίνεται ιδιαίτερη έμφαση σε **εφαρμογές στην Αλγεβρική Τοπολογία, στη Θεωρία Κωδίκων, στη Φυσική**, κ.α.

Ροή Μ: Μαθήματα 8ου εξαμήνου

- Εφαρμογές της Λογικής στην Πληροφορική
- Εφαρμοσμένα Μαθηματικά - Λογισμός Μεταβολών
- Θεωρία Αριθμών
- Θεωρία Γραφημάτων
- Άλγεβρα ΙΙ και Εφαρμογές

Εφαρμογές της Λογικής στην Πληροφορική (Μαθηματική Λογική)

Πρωτοβάθμιος **κατηγορηματικός λογισμός**, μοντέλα, **μοντέλα Herbrand**, clauses, κανονική μορφή, prenex, **κανονική μορφή Skolem**, resolution, **ορθότητα και πληρότητα του resolution του Robinson**.

Θεωρία Λογικού προγραμματισμού, Horn clauses, μέθοδοι έρευνας, η άρνηση ως αποτυχία και η σημασιολογία της, μη-μονότονη συλλογιστική, **μοντέλα τριών τιμών αλήθειας**. Συναρτησιακός προγραμματισμός και **λ-λογισμός**: λ-λογισμός χωρίς τύπους: **Θεώρημα Church-Rosser**, μοναδικότητα της κανονικής μορφής, προγραμματισμός στο λ-λογισμό, ιδιότητες κανονικοποιήσιμων όρων.

Με τύπους: **Τα συστήματα Curry και Church**, δυνατότητες προγραμματισμού στα συστήματα αυτά. **Οι αποδείξεις ως προγράμματα**, ισομορφισμός του Curry-Howard, δευτεροβάθμια λογικά συστήματα, συστήματα πολυμορφισμού.

Σημασιολογία της πληροφορικής: προγραμματιστικών γλωσσών, θεωρία του σταθερού σημείου. **Αλγεβρικές προδιαγραφές**. Εισαγωγή στην εξισωτική λογική και τη **θεωρία κατηγοριών**. Παραδείγματα αυτόματης απόδειξης. Τυπικές Μέθοδοι και εφαρμογές. Γλώσσες προδιαγραφών συστημάτων και επαλήθευση.

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά - Λογισμός Μεταβολών (Μαθηματική Ανάλυση)

Εισαγωγή στο Λογισμό των Μεταβολών: Αναγκαίες και ικανές συνθήκες για ακρότατα. Εξισώσεις Euler-Lagrange. Ακρότατα με περιορισμούς, πολλαπλασιαστές Lagrange.

Βέλτιστος Έλεγχος: Συστήματα ελέγχου, Προσιτά σύνολα, Τοπολογικές ιδιότητες, Ελεγξιμότητα. **Το πρόβλημα Ελάχιστου Χρόνου στη Γραμμική περίπτωση, Ακρότατος Έλεγχος, Αρχή του Μεγίστου**. **Ελαχιστοποίηση τετραγωνικού κόστους** στην Γραμμική περίπτωση χωρίς περιορισμούς στο σύνολο εισόδων, η **εξίσωση Riccati**.

Μη Γραμμικά Συστήματα: Τοπολογικές ιδιότητες προσιτών συνόλων, ακρότατος έλεγχος, η γενική **Αρχή του Μεγίστου** (**Pontryagin**'s Maximum Principle). **Αναγκαίες συνθήκες σε προβλήματα αρίστου ελέγχου** με και χωρίς περιορισμούς στον έλεγχο. **Ικανές συνθήκες** και θεωρήματα ύπαρξης. Η **εξίσωση Hamilton-Jacobi-Bellman**. **Εφαρμογές**.

Θεωρία Γραφημάτων (Διακριτά Μαθηματικά, Συνδυαστική)

Το μάθημα παρέχει μία **σε βάθος εισαγωγή στη Θεωρία Γραφημάτων**.

Μελετώνται βασικές έννοιες που αφορούν σε γραφήματα όπως ο **βαθμός κορυφής**, η **απόσταση μεταξύ κορυφών**, τα **μονοπάτια και οι κύκλοι**, η **συνεκτικότητα**, καθώς και συναφείς με αυτές ιδιότητες.

Έμφαση δίνεται σε **ειδικές κατηγορίες γραφημάτων** όπως τα **δένδρα**, τα **Eulerian γραφήματα**, τα **Hamiltonian γραφήματα** και τα **επίπεδα γραφήματα**. Εξετάζονται επίσης βασικά θέματα γραφημάτων που αφορούν το **χρωματισμό κορυφών και ακμών** καθώς και την εύρεση ταιριασμάτων.

Το μάθημα πρωτίστως εστιάζει στην **ανάδειξη** και **απόδειξη ιδιοτήτων** που ισχύουν **για συγκεκριμένες κατηγορίες γραφημάτων** και δευτερευόντως στην **ανάπτυξη αλγορίθμων** για την επίλυση προβλημάτων της θεωρίας γραφημάτων.

Θεωρία Αριθμών (Άλγεβρα και Εφαρμογές)

Το μάθημα αποτελεί μια εισαγωγή στη βασική Θεωρία Αριθμών, και κάποια στοιχεία Αναλυτικής Θεωρίας Αριθμών.

Πιο συγκεκριμένα, κάποια από τα θέματα στα οποία εστιάζει είναι:

- **Διαιρετότητα**, μέγιστος κοινός διαιρέτης, ο ευκλείδιος αλγόριθμος, απλά πεπερασμένα και άπειρα συνεχή κλάσματα.
- **Πρώτοι αριθμοί** και το θεμελιώδες θεώρημα της Αριθμητικής, οι αριθμοί του Fermat.
- **Αριθμητικές συναρτήσεις:** συνάρτηση Mobius και συνάρτηση Euler, γινόμενο Dirichlet.
- **Αριθμητική υπολοίπων:** ισοδυναμίες, συστήματα υπολοίπων και το "Κινέζικο" θεώρημα.
- Τετραγωνικά υπόλοιπα και ο νόμος της τετραγωνικής αντιστροφής.
- Σειρές Dirichlet, η συνάρτηση ζήτα του Riemann.
- Πρώτοι σε αριθμητικές προόδους και το θεώρημα Dirichlet.

Άλγεβρα ΙΙ και Εφαρμογές (Άλγεβρα και Εφαρμογές)

- Εισαγωγή στη Θεωρία Αναπαραστάσεων. **Δράση ομάδας** σε σύνολο, το **Θεώρημα Burnside**, τα **Θεωρήματα Sylow και εφαρμογές**.

- Εισαγωγή στους **δακτυλίους**, στα **σώματα** και στις **ακέραιες περιοχές**. **Δακτύλιοι πολυωνύμων**, ανάλυση πολυωνύμων σε σώμα, αναγωγιμότητα, το **Κριτήριο Eisenstein**.

- Ομομορφισμοί δακτυλίων, δακτύλιοι-πηλίκα, πρώτα και μέγιστα ιδεώδη.

- **Επεκτάσεις σωμάτων**: αλγεβρικές επεκτάσεις, **το αδύνατον κάποιων γεωμετρικών κατασκευών με κανόνα και διαβήτη**.

- Τα **πεπερασμένα σώματα**. Αυτομορφισμοί σωμάτων, στοιχεία Θεωρίας Galois.